

Лекция 3 Уравнения гидротермодинамики для турбулентной атмосферы. Упрощения уравнений гидротермодинамики.

Цель: Объяснить виды вязких сил, действующих на атмосферу. Вывести уравнения гидротермодинамики для турбулентной атмосферы.

Сила градиента давления

Сила градиента давления является реальной силой, которая переносит воздух от областей высокого давления к областям низкого давления, то есть является результатом перепада давления. Предположим, что куб воздуха имеет объем $\Delta x \Delta y \Delta z$. Предположим также, что давление воздуха на правой и левой сторонах участка придают силы:

$$F_{p,l} = - \left(p_c + \frac{\partial p_a}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z \quad F_{p,r} = \left(p_c - \frac{\partial p_a}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z \quad (4.50)$$

где p_c является давление в центре участка. Разделяя сумму этих сил на массу пакета частиц $M_a = \rho_a \Delta x \Delta y \Delta z$ и допуская что $\Delta x \Delta y \Delta z$ стремится к нулю и можно получить градиент давления силы на единицу массы в направлении x :

$$\frac{F_{p,l}}{M_a} = \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p_a}{\partial x} \quad (4.51)$$

Сила градиента давления на единицу массы может быть обобщена для трех направлений в декартовой системе координат:

$$\frac{F_p}{M_a} = - \frac{1}{\rho_a} \nabla p_a = - \frac{1}{\rho_a} \left(i \frac{\partial p_a}{\partial x} + j \frac{\partial p_a}{\partial y} + k \frac{\partial p_a}{\partial z} \right) \quad (4.52)$$

Вязкая сила

Когда молекулы газа сталкиваются с неподвижной поверхностью, они передают импульс к поверхности, в результате чего образуется убыток энергии между молекулами газа. Разложение кинетической энергии, содержащейся в молекулах газа, из-за вязкости является причиной изменения скорости ветра, которая равна нулю на земле и увеличивается логарифмически над землей. При отсутствии молекулярной вязкости, скорость ветра непосредственно над землей будет больше.

Молекулярная вязкость воздуха может быть определена количественно с помощью формулы:

$$\eta_a = \frac{5}{16Ad_a^2} \sqrt{\frac{m_a R^* T}{\pi}} \approx 1.8325 \times 10^{-5} \left(\frac{416.16}{T + 120} \right) \left(\frac{T}{296.16} \right)^{1.5} \quad (4.54)$$

(кг · м⁻¹ с⁻¹), называется динамической вязкостью воздуха

$$\nu_a = \frac{\eta_a}{\rho_a} \quad (4.55)$$

(м² с⁻¹), который представляет собой молекулярный коэффициент диффузии воздуха.

Вязкая сила

Поскольку слои воздуха скользят друг по другу с разной скоростью из-за сдвига ветра, каждый слой оказывает на другой вязкое напряжение (напряжение сдвига) или силу на единицу площади. Напряжение действует параллельно направлению движения и по плоскости, перпендикулярной направлению сдвига. Если сдвиг ветра в направлении z прикладывает усилие в направлении x на единицу площади x - y , в результате сдвига напряжение равно:

$$\tau_{zx} = \eta_a \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.56)$$

($\text{H} \cdot \text{m}^{-2}$ или $\text{кг м}^{-1} \text{с}^{-2}$), где η_a динамическая вязкость воздуха из (4.54), а также отношение касательного напряжения к сдвигу. Касательное напряжение возникает, когда импульс транспортируется вниз градиентом скорости, так же, как молекулы газа транспортируются вниз градиентом концентрации газа.

Кубический участок воздуха испытывает касательное напряжение сверху и снизу, как показано на рис. 4.9.

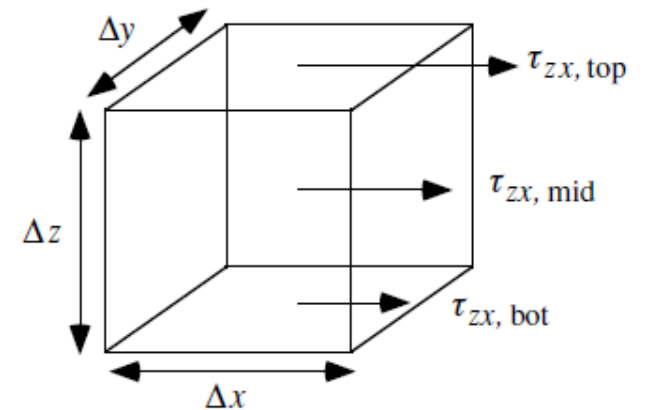


Рисунок 4.9

Вязкая сила

Вязкая сила на участке воздуха есть разность касательного напряжения на вершине и касательного напряжения на дне, умноженная на площадь, на которую действует напряжение. Сила действует по направлению движения. Если τ_{zx} является напряжением сдвига в середине участка, и если $\partial\tau_{zx} / dz$ является вертикальным градиентом касательного напряжения, касательные напряжения сверху и снизу, соответственно равны:

$$\tau_{zx,top} = \tau_{zx} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \qquad \tau_{zx,bot} = \tau_{zx} - \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \qquad (4.57)$$

Разницу касательных напряжений умножим на площадь, и разделим на массу, $M_a = \rho_a \Delta x \Delta y \Delta z$, получим вязкое трения на единицу массы:

$$\frac{F_{v,zx}}{M_a} = (\tau_{zx,top} - \tau_{zx,bot}) \frac{\Delta x \Delta y}{\rho_a \Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \qquad (4.58)$$

Вязкая сила

Подставляя напряжение сдвига из (4.57) в (4.58), и предполагая, что η_a инвариантно по высоте, получаем

$$\frac{F_{v,zx}}{M_a} = \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta_a \frac{\partial u}{\partial z} \right) \approx \frac{\eta_a}{\rho_a} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4.59)$$

Это уравнение показывает, что, если скорость ветра не меняется с высотой или изменяется линейно и η_a постоянна, вязкая сила на единицу массы в направлении x из-за сдвига в направлении оси z равна нулю. В таких случаях, напряжение линейно зависит от высоты, и не возникает вязкая сила. Когда скорость ветра нелинейно изменяется с высотой, а касательное напряжение в верхней части отличается от того, что внизу, и вязкая сила отлична от нуля. Рисунок 4.10 иллюстрирует эти два случая.

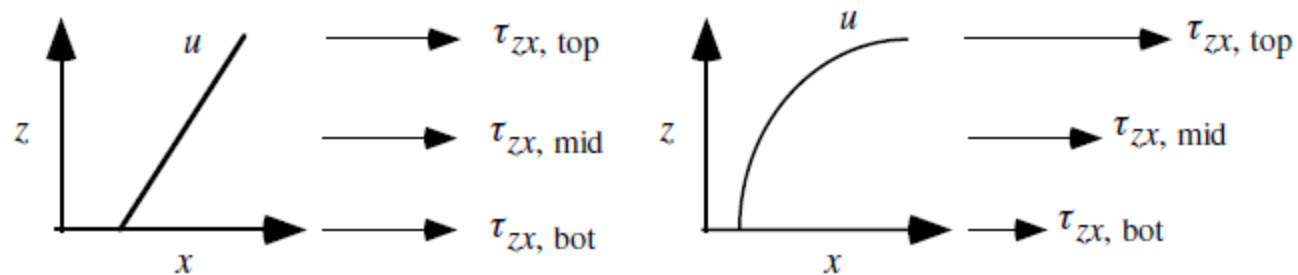


Рисунок 4.10

Вязкая сила

Раскрытие (4.59) дает вязкий вектор силы на единицу массы:

$$\frac{F_v}{M_a} = \frac{\eta_a}{\rho_a} \nabla^2 \mathbf{v} = \nu_a \nabla^2 \mathbf{v} \quad (4.60)$$

где ν_a дано в (4.55). Выражение квадрата градиента в декартовой системе координат

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{v} = (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{v} = & i \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \\ & j \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Дивергенция турбулентного потока

На земле скорость ветра равна нулю. В поверхностном слое, который является областью атмосферы 50-300-м толщиной, прилегающей к поверхности, скорость ветра растет логарифмически с увеличением высоты, создавая сдвиг ветра. Сдвиг ветра производит напряжение сдвига, что повышает столкновения на молекулярном уровне. На больших масштабах, сдвиг ветра производит вращающиеся движения воздуха.

Турбулентность состоит из многих завихрений разного размера, действующих совместно. Сдвиг ветра, возникающий из-за препятствий, называют механическим сдвигом, и полученный результат называется механической турбулентностью. Тепловая турбулентность -это турбулентность, возникающая из-за завихрений разного размера, вытекающая из плавучести. Механические турбулентности является наиболее важными в поверхностном слое, а тепловые турбулентности является наиболее важными в смешанном слое.

Дивергенция турбулентного потока

В моделях, которые параметризованы подсеточным масштабированием, параметризация может быть получена следующим образом. Умножая точное ускорение воздуха из (4.22) на ρ_a , умножая уравнение неразрывности для воздуха из (3.20) на v , в результате получим

$$\rho_a a_1 = \rho_a \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v \right] + v \left[\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \nabla \cdot (v \rho_a) \right] \quad (4.62)$$

Переменные в этом уравнении разложим в $v = \bar{v} + v'$ и $\rho_a = \bar{\rho}_a + \rho_a'$. Потому как возмущение плотности, как правило, небольшое ($\rho_a' \ll \bar{\rho}_a$), уравнение упрощается до $\rho_a = \bar{\rho}_a$. Подставляя значение разложения в (4.62) получаем:

$$\bar{\rho}_a a_1 = \bar{\rho}_a \left\{ \frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial t} + [(\bar{v} + v') \cdot \nabla](\bar{v} + v') \right\} + (\bar{v} + v') \left\{ \frac{\partial \bar{\rho}_a}{\partial t} + \nabla [(\bar{v} + v') \bar{\rho}_a] \right\} \quad (4.63)$$

Дивергенция турбулентного потока

Принимая временное и сеточно-объемное среднее уравнение, устраняющие бесконечно малые выражения и удаление ненужных осредненных значений

$$\bar{\rho}_a a_1 = \bar{\rho}_a \left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + [(\bar{v} \cdot \nabla)] \bar{v} \right] + \bar{v} \left[\frac{\partial \bar{\rho}_a}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{v} \bar{\rho}_a) \right] + \overline{\bar{\rho}_a (v' \cdot \nabla) v' + v' \nabla \cdot (v' \bar{\rho}_a)} \quad (4.64)$$

Подставляя временные и сеточно-объемные, усредненные уравнения неразрывности для воздуха из (3.48) в (4.64) и разделив на $\bar{\rho}_a$, заменяя $a_l = \bar{a}_l + a'_l$, где

$$\bar{a}_1 = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} \quad a'_1 = \frac{F_t}{M_a} = \frac{1}{\bar{\rho}_a} \left[\overline{\bar{\rho}_a (v' \cdot \nabla) v' + v' \nabla \cdot (v' \bar{\rho}_a)} \right] \quad (4.65)$$

Дивергенция турбулентного потока

Расширение турбулентного потока дивергенции в (4.65) в декартовой системе координат

$$\begin{aligned} \frac{F_t}{M_a} = & i \frac{1}{\rho_a} \left[\frac{\partial(\rho_a \overline{u'u'})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_a \overline{v'u'})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_a \overline{w'u'})}{\partial z} \right] \\ & + j \frac{1}{\rho_a} \left[\frac{\partial(\rho_a \overline{u'v'})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_a \overline{v'v'})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_a \overline{w'v'})}{\partial z} \right] \\ & + k \frac{1}{\rho_a} \left[\frac{\partial(\rho_a \overline{u'w'})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_a \overline{v'w'})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_a \overline{w'w'})}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (4.66)$$

Осредненные значения, такие как $\overline{u'u'}$, и $\overline{w'v'}$, ($m \ m \ s^{-1} \ s^{-1}$), кинематические турбулентные потоки импульса, так как они имеют единичные потоки импульса ($kg \ m \ s^{-1} \ m^{-2} \ s^{-1}$), разделенные по плотности воздуха ($kg \ m^{-3}$). Каждая такая средняя величина должна быть параметризована. С помощью К-теории, вертикальные кинематические турбулентные потоки импульса с запада на восток и юга на север аппроксимируются с

$$\overline{w'u'} = -K_{m,zx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad \overline{w'v'} = -K_{m,zy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad (4.67)$$

где K_m – вихревой коэффициент диффузии для импульса ($m^2 s^{-1}$ или $sm^2 s^{-1}$).

Дивергенция турбулентного потока

Подставляя (4.67) и другие аналогичные уравнения в (4,66) и убирая осредненные значения для простоты, получаем дивергенцию турбулентного потока

$$\begin{aligned} \frac{F_t}{M_a} = & -i \frac{1}{\rho_a} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_a K_{m,xx} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_a K_{m,yx} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_a K_{m,zx} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\ & - j \frac{1}{\rho_a} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_a K_{m,xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_a K_{m,yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_a K_{m,zy} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \\ & - k \frac{1}{\rho_a} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_a K_{m,xz} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_a K_{m,yz} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_a K_{m,zz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.68)$$

Коэффициенты вихревой диффузии в (4.68) можно записать в тензорной форме как

$$K_m = \begin{bmatrix} K_{m,xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{m,yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{m,zz} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} K_{m,xy} & 0 & 0 \\ 0 & K_{m,yx} & 0 \\ 0 & 0 & K_{m,zy} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} K_{m,xz} & 0 & 0 \\ 0 & K_{m,yz} & 0 \\ 0 & 0 & K_{m,zz} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

В векторном и тензорном обозначении, (4.68) упрощается

$$\frac{F_t}{M_a} = -\frac{1}{\rho_a} (\nabla \cdot \rho_a K_m \nabla) v \quad (4.70)$$

Таблица 4.1 Члены уравнения импульса и их горизонтальные и вертикальные величины

Параметр	Ускорение или выражение силы / массы	Горизонтальное ускорение (м с ⁻²)	Вертикальное ускорение (м с ⁻²)
Местное ускорение	$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v$	10^{-4}	$10^{-7} - 1$
Сила Кориолиса на единичную массу	$\frac{F_c}{M_a} = -fk \times v$	10^{-3}	0
Эффективная сила гравитации на единицу массы	$\frac{F_g - F_g^*}{M_a} + \frac{F_r}{M_a} = -\nabla\Phi$		10
Сила градиента давления на единицу массы	$\frac{F_p}{M_a} = -\frac{1}{\rho_a} \nabla p_a$	10^{-3}	10
Вязкая сила на единицу Массы	$\frac{F_\mu}{M_a} = \frac{\eta_a}{\rho_a \rho} \nabla^2 v$	$10^{-12} - 10^{-3}$	$10^{-15} - 10^{-12}$
Дивергенция турбулентного потока		0-0.005	0-1

$$\frac{dv}{dt} = -fk \times v - \frac{1}{\rho_a} \nabla p_a + \frac{\eta_a}{\rho_a \rho} \nabla^2 v + \frac{1}{\rho_a} (\nabla \cdot \rho_a K_m \nabla) v \quad (4.71)$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Назовите вязкие силы, охарактеризуйте их;
2. Математические описания этих сил;
3. Назовите все члены уравнения импульса и их горизонтальные и вертикальные величины.